Historische Aspekte im Mathematikunterricht

Manfred Kronfellner, Wien

Seit der Mitte der Siebzigerjahre ist ein deutliches Zunehmen an mathematik-didaktischen Publikationen mit Bezug zur Geschichte der Mathematik zu erkennen. Ein Grund dafür (neben anderen) liegt wohl in der auf die "Neue Mathematik" der Sechzigerjahre folgende Trendwende, die zu einer weitgehenden Abkehr von (vermeintlich) bourbakistischen Elementen in der Schulmathematik und zu einer Orientierung am genetischen Prinzip führte, das bereits zu Beginn unseres Jahrhunderts von Felix Klein und Otto Toeplitz propagiert wurde.

> *"Entweder man könnte den Studenten direkt die Entdeckung in ihrer ganzen Dramatik vorführen und solcherart die Fragestellungen, Begriffe und Tatsachen vor ihnen entstehen lassen – das würde ich die direkte genetische Methode nennen – , oder man könnte für sich selbst aus solcher historischer Analyse lernen, was der eigentliche Sinn, der wirkliche Kern jedes Begriffs ist, und könnte daraus Folgerungen für das Lehren dieses Begriffs ziehen, die als solche nichts mehr mit der Historie zu tun haben – die indirekte genetische Methode."*
>
> (Toeplitz 1927, S. 92)

Heute wird eine Darstellung eines mathematischen Gebietes als genetisch bezeichnet,

> *"... wenn sie an den natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik ausgerichtet ist. Entsprechend der Tatsache, dass sich Theorien in den exakten Wissenschaften bei der Untersuchung von Problemen durch Verfeinerung primitiver Vorformen entwickelten und weiterentwickeln, kann man eine genetische Darstellung durch folgende Merkmale charakterisieren:*
>
> *Anschluss an das Vorverständnis des Adressaten,*
>
> *Einbettungen der Überlegungen in größere ganzheitliche Problemkontexte außerhalb oder innerhalb der Mathematik,*
>
> *Zulässigkeit einer informellen Einführung von Begriffen aus dem Kontext heraus,*
>
> *Hinführung zu strengen Überlegungen über intuitive und heuristische Ansätze,*
>
> *durchgehende Motivation und Kontinuität,*
>
> *während des Voranschreitens allmähliche Erweiterung des Gesichtskreises und entsprechende Standpunktverlagerung."*
>
> (Wittmann 1975, S. 106ff.)

"Genetisch" ist zwar nicht mit "historisch" gleichzusetzen, aber – siehe Toeplitz - die Geschichte der Mathematik liefert sehr oft hilfreiche Anregungen für einen schülergerechten Zugang zu einem mathematischen Gebiet. Außerdem lehrt sie, dass große Mathematiker früherer Zeiten mit Argumentationen, die mancher zeitgenössische Mathematiker vielleicht als "nur heuristisch" abqualifizieren würde, richtungsweisende Erkenntnisse und Resultate erzielten.

1 Ziele eines historisch orientierten Mathematikunterrichts

1.1 Affektive Ziele

Etliche Autoren und vor allem viele Lehrer erhoffen sich vom Einbau historischer Aspekte im Mathematikunterricht in erster Linie eine *Auflockerung der Unterrichts* und eine *motivierende Wirkung* auf die Schüler. Die Erkenntnis, dass Mathematik von Menschen "gemacht" wurde, dass diese auch Fehler begangen und uns naheliegend erscheinende Weiterentwicklungen nicht erkannt haben, könnte der vielen Menschen als kühl und unmenschlich erscheinenden Mathematik ein menschlicheres Antlitz verleihen und zum *Abbau psychischer Barrieren* führen. Durch Hervorhebung der Leistungen von Mathematikern aus dem eigenen Land bzw. Kulturkreis (z.B. Johann Radon, Kurt Gödel, ...) könnte vielleicht – ähnlich wie im Sport – bei manchen Schülern ein "patriotischer Identifikationseffekt" eintreten und zu einem positiven Verhältnis zur Mathematik beitragen. (Dazu gibt es bereits einige entsprechende Erfahrungen aus multikulturellen Schulen: z.B. Schüler aus dem arabischen Kulturraum erfüllte es mit Stolz, wenn der arabische Ursprung eines mathematischen Teilgebiets erwähnt wurde. Entsprechendes konnte auch an Schülern bzw. Studenten anderer Nationalitäten beobachtet werden.)

1.2 Kognitive Ziele

> *"Mathematikunterricht behandelt Sachverhalte, die zum größten Teil seit langem bekannt sind. Die Schüler lernen ein Kulturgut kennen, von dem sie den Eindruck der Abgeschlossenheit erhalten. ... Die Entwicklungsfähigkeit der Mathematik erkennt praktisch kein Schüler."*
>
> (Vollrath 1987, S. 374; Hervorhebungen im Original.)

Wenngleich Vollrath damit nicht vordergründig ein Forcieren der Mathematikgeschichte im Auge hat, erscheint diese doch (neben anderem) geeignet, diesem Missstand ein wenig abzuhelfen und zur Vermittlung eines adäquaten Bildes von Mathematik als Wissenschaft beitragen. In eine ähnliche Richtung zielt auch das folgende Zitat:

> *"Wie soll eigentlich ein Abiturient die Frage beantworten: Worauf richtet sich das Erkenntnisinteresse der Mathematik? Was will der Mathematiker wissen? Die Antwort soll doch sicher nicht heißen: Er will wissen, welche Extremwerte ein gewisses Polynom hat, oder in welchem Punkt sich eine Gerade und eine Ebene im Raum schneiden. In dieser Beziehung haben wir eine fundamentale Diskrepanz zwischen der Mathematik und allen anderen Fächern. Weder der Musiklehrer noch der Deutschlehrer lassen sich von den Schwierigkeiten abschrecken: Die Schüler lernen an erstklassigen Beispielen unserer kulturellen Tradition, ihren Geschmack zu bilden. Hier hat die Mathematik ein Defizit, in der Schule wie auch in weiten Bereichen des Hochschulunterrichts."*
>
> (Artmann/Spalt/Gerecke 1987, S. 217f)

Auf Grund der extremen Spezialisierung der gegenwärtigen Mathematik ist es in der Schule praktisch nicht möglich, das Wesen und die Genese mathematischer Erkenntnisse anhand der gegenwärtigen Forschung dem Schüler plausibel zu machen. Durch Zurückgehen zu den historischen Wurzeln eines mathematischen Begriffs oder Teilgebiets können solche Erkenntnisprozesse dem Schüler eher nahegebracht werden. (Z.B.: Entstehung der Algebra aus dem systematischen Suchen nach Lösungsformeln bzw. aus der Frage nach der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen; Entwicklung des Grenzwertbegriffs aus den Schwierigkeiten bei einer präzisen Fundierung der Analysis; ...)

Auch die bei einer nachträglichen Exaktifizierung eines Kapitels intendierte Vermittlung der Veränderlichkeit eines Begriffs (vgl. etwa Bürger et al. 1991, Kronfellner/Peschek 1991), kann durch begleitende historische Betrachtungen als ein realer Prozess und nicht nur als ein "didaktischer Trick" erkannt werden und gewinnt dadurch an Überzeugungskraft. Analoges gilt auch für allgemeine Lernziele wie Generalisieren, Abstrahieren, Formalisieren, u. ä.: anhand historischer Entwicklungen kann aufgezeigt werden, dass diese tatsächlich fundamentale Tätigkeiten sind.

Es sollte den Schülern nicht nur klargemacht werden, dass Wissenschaften sich entwickeln, sondern auch, dass diese Entwicklungen nicht unabhängig von den gesellschaftlichen Rahmenbedingungen verlaufen. Einige Beispiele dazu:

- Die ersten mathematischen Aktivitäten (im weitesten Sinne) entstanden in der Menschheitsgeschichte in der Phase des Überganges vom Jäger/Sammler zum Regenfeldbau. Die Sesshaftwerdung und später der Übergang zu größeren sozialen Einheiten (Stadtstaaten, Großreiche) machten verschiedene organisatorische Maßnahmen notwendig, bei denen (Anfänge der) Mathematik eine Rolle spielten: Bewässerung, Nahrungsmittelbedarfberechnung bei größeren Vorhaben (Pyramidenbau), Ausbau des Verkehrs, (Ansätze einer) Vereinheitlichung der Maße, u.a. m.
- Im Gesellschaftssystem der Griechen wird (auf Grund des materiellen Wohlstandes einer gehobenen Schicht) Wissenschaft im heutigen Sinn salonfähig und möglich.
- Im Zuge der Ausbreitung des Islam kam es auch zu einer Verbreitung (und Weiterentwicklung) des antiken (mathematischen) Wissen.
- Die zunehmende Bedrohung Konstantinopels durch das osmanische Reich im 14./15. Jahrhundert veranlasste viele byzantinische Gelehrte, nach Westen, insbesondere nach Italien abzuwandern, was nicht zuletzt auch Einfluss auf das Gedankengut der Renaissance sowie auf die Ausbildung des naturwissenschaftlichen Weltbildes und der Mathematik ausübte.
- Die Entdeckungsreisen zu Beginn der Neuzeit und der dabei erhoffte materielle Gewinn motivierten zu Entwicklungen und Verbesserungen auf den Gebieten der Kartographie und der Navigation, in der Folge dann auch zur Konstruktion genauer Uhren, und weiter – über die theoretische Mechanik – zu einen Motivationsschub für die Mathematik.

u.a.m.

Das Aufzeigen der oben erwähnten Vernetzungen lässt auch die gegenseitige Bedingtheit von politischen, sozialen, wirtschaftlichen und kulturellen Strukturen in Vergangenheit und Gegenwart – auch unabhängig von der Mathematik – erahnen und trägt somit zur Bildung eines originären Geschichtsbewusstseins bei. Somit kann im Mathematikunterricht auch ein Beitrag zu diesen, dem Geschichtsunterricht zuzurechnenden Zielen geleistet werden. (Fächerübergreifender Unterricht im weiteren Sinn.)

2 Präsentationsformen von Geschichte der Mathematik im Unterricht

2.1 Anekdoten

Von Lehrern wird sehr häufig der Wunsch nach einer Sammlung von Anekdoten geäußert, die – insb. zur Auflockerung und zur Motivation – an passenden Stellen in den Unterricht eingebaut werden können. Als geradezu klassisches und vorbildhaftes Beispiel für solche Anekdoten wird dabei jene über die Entdeckung der Summenformel für arithmetische Reihen durch C.F. Gauß genannt.

Es gibt zwar viele mathematikhistorische Anekdoten, aber kaum welche, die – wie die oben erwähnte – in einem engen Konnex zu einem schulrelevanten Inhalt (im engsten Sinn des Wortes) stehen. Die meisten beschreiben eher Einstellungen oder Wertungen von einzelnen Mathematikern oder einer bestimmten Epoche.

2.2 Historische Kurzinformationen

Neben solchen Anekdoten könnten aber auch schon einzelne eingestreute Sätze, wie etwa: "Descartes bezeichnete die negativen Zahlen als 'falsch' und vermied ihren Gebrauch" oder "Gauss hatte einen Horror vor dem Unendlichen" (zitiert nach Jones 1978, S. 60) zum Nachdenken und Diskutieren über Mathematik und Mathematiker sowie über Wissens- und Wissenschaftsentwicklung anregen.

Weiters sei noch erwähnt, dass auch bloße (größenordnungsmäßige) Zeitangaben manchmal interessante Fragen aufwerfen können. Z.B.: Parabelquadratur durch Archimedes (3. Jht. v. Chr.) – Beginn einer systematischen Entwicklung der Integralrechnung (17./18. Jht.): diese lange Zeitspanne gibt zu denken; was passierte in diesen 2000 Jahren? War diese Zeit wissenschaftsfeindlich? Wozu betrieb man Wissenschaft? Wer? Wo? Wie? Was bewirkte den Umschwung? ... Solche Bemerkungen könnten u. U. auch Ausgangspunkt für eine intensivere Beschäftigung mit dem betreffenden Thema sein.

2.3 Mathematische Zeitgeschichte

Ebenso wie es in Physik üblich ist, die Grundgedanken der allgemeinen Relativitätstheorie oder der Quantenmechanik verbal zu vermitteln, sollte man auch in Mathematik entsprechende neuere Entwicklungen in dieser Art, also rein phänomenologisch, im Unterricht einbauen und so auf diese Weise einen Beitrag zur "Zeitgeschichte der Mathematik" liefern. Damit soll Mathematik als eine sich (zumindest quantitativ) mehr denn je entwickelnde Wissenschaft erfahrbar gemacht und auf diese Weise dem weit verbreiteten Bild einer starren, abgeschlossenen Wissenschaft entgegengewirkt werden.

Beispiele:

- Nonstandard Analysis
- Kontinuumshypothese
- Gödels Unvollständigkeitssatz
- Fuzzy-Mengen, Fuzzy-Geometrie, Fuzzy-Logik
- Der Beweis des "Großen Satzes von Fermat"
- Vier-Farben-Satz; Computerbeweise
- Computertomographie, Radon-Transformation
- Codierungstheorie, Kryptographie
- Fraktale
- Chaostheorie (vgl. Kirchgraber 1992)
- Industriemathematik (vgl. Maaß/Schlöglmann 1992)

u.v.a.
(Für eine ausführlichere Darstellung siehe Kronfellner 1997.)

2.4 Schulbuchtexte über die Entwicklung mathematischer Teilgebiete

In Lehrbüchern findet man in zunehmendem Maße Passagen zu historischen Themen. Während sich in den Unterrichtswerken der Sekundarstufe I meist nur jeweils einige Sätze eingestreut sind, gibt es in Büchern für die Sekundarstufe II häufig eigene Kapitel zur Entwicklung eines mathematischen Teilgebiets, manchmal im Ausmaß von mehreren Seiten, meist im Anschluss an die herkömmliche Erarbeitung des betreffenden Teilgebietes.

Diese Abschnitte werden zwar von Lehrern – wie oft glaubhaft versichert wird – gerne und mit Interesse gelesen, haben aber nach Aussage derselben Lehrer keinen Einfluss auf deren Mathematikunterricht. (Ähnliche Erfahrungen konnten mehrfach mit Lehrerfortbildungsseminaren zu historischen Themen gemacht werden.) Ein Grund dafür ist in der Unterrichtsideologie zu sehen, derzufolge Mathematikunterricht nahezu ausschließlich im Abarbeiten von Aufgaben besteht, sowie auch – als Folge davon – darin, dass das Schulbuch praktisch ausschließlich als Aufgabensammlung benutzt wird. Es sind also nicht nur historische Themen kein Ziel des Mathematikunterrichts, sondern auch das Arbeiten mit (mathematischen) Texten, allgemein mit Fachliteratur sowie das Gewöhnen der Schüler an ein eigenständiges Arbeiten werden von den meisten Lehrern nicht explizit und bewusst als Ziel ihres Unterrichts verfolgt. Dabei wäre es meist einfacher, die Schüler anhand von historischen Passagen oder anderer "Lesestoffe" (z.B. reflektierende Betrachtungen über die Existenz bestimmter mathematischer Objekte, vgl. etwa Kronfellner/Peschek 1990, S. 29ff, Kronfellner/Peschek 1992, S. 77ff) an das eigenständige Arbeiten mit Büchern zu gewöhnen als anhand des Durchdenkens eines mathematischen Inhalts im engeren Sinn (wie etwa Algorithmen, Rechenschemata, Beweise, Erarbeitungen mathematischer Begriffe, ...).

2.5 Vermittlung historischen Wissens mittels (langfristiger) Unterrichtsplanung

Historisches Wissen (in Ansätzen) kann auch durch einen (längerfristig geplanten) Unterricht vermittelt werden, der sich mehr oder weniger an der Entwicklung des betreffenden Begriffes oder Teilgebietes orientiert. In diesem Falle eines historisch-genetischen Unterrichts "genügt" dann prinzipiell der Hinweis, dass auch in der Geschichte der Ablauf (in etwa) so gewesen sei, um eine erste Idee einer historischen Entwicklung nahezubringen.

Als Beispiel kann hier wieder das Prinzip der nachträglichen Exaktifizierung angeführt werden, wenn der anschauliche Einstieg auch eine historisch frühere Stufe darstellt. Dadurch erscheint dieses Prinzip der nachträglichen Exaktifizierung nicht nur als "didaktischer Trick", sondern als Skizze eines realen Prozesses, an dem die Schüler die Dynamik der Mathematik (und damit – paradigmatisch – die Dynamik von Wissenschaft schlechthin) erkennen und erfahren können.

2.6 Längsschnitte – Vernetzungen

Die zuvor erwähnten historischen Abschnitte in Schulbüchern sind praktisch immer im Zuge der begrifflichen und algorithmischen Aufarbeitung eines entsprechenden mathematischen Inhalts angesiedelt. Die innermathematische Systematik wird dabei nicht verlassen.

Die Dominanz der innermathematischen Systematik ist auch dafür verantwortlich, dass für viele Schüler mathematische Inhalte beziehungslos nebeneinander stehen und Querverbindungen (Vernetzungen) zwischen Inhalten zeitlich getrennt behandelter Kapitel nicht erkennbar bzw. herstellbar sind.

In anderen Schulfächern wird in zunehmendem Maße das Aufweichen der jeweils dominierenden Fachsystematik propagiert: im Geschichtsunterricht etwa soll die chronologische Systematik in vermehrtem Maße durch die Behandlung von *Längsschnitten* ergänzt werden, d.h. durch die Bearbeitung desselben Themas in verschiedenen Zeitepochen. (Vgl. BMUKS 1987, S. 1!) Im Physikunterricht der 6. Schulstufe lässt man sich – insb. zu Beginn – nicht von einer traditionellen Physik-Systematik einengen, sondern bespricht verschiedenste physikalische Effekte des täglichen Lebens. (Vgl. Lehrplan 1985, S. 218: "Begegnung mit Physik im Alltag")

In anderen Fächern war auch schon bisher das Verlassen der jeweils dominierenden Systematik unumgänglich (z.B. Musik: Musikgeschichte – Formenlehre, analog Deutsch, u.s.w.)

Wissensvernetzung ist auch eines der Ziele, das man mit dem in den Mathematiklehrplänen vorgeschriebenen Projektunterricht anpeilt. Darüber hinaus besteht auch im Mathematikunterricht die Möglichkeit der Behandlung solcher Längsschnitte (im weitesten Sinn, nicht notwendigerweise nur historische Themen); z.B.:

- Die Entwicklung des Zahlbegriffs
- Das Lösen von Gleichungen: Die Geschichte der Algebra von der Hau-Rechnung der Ägypter bis zum abstrakten Gruppenbegriff
- Primzahlen und Teilbarkeit von der Antike bis heute

- Rechenhilfsmittel
- Der Begriff der Kurve: Von der Antike bis zu den Fraktalen
- Die drei klassischen Probleme der Antike – Unmöglichkeitsbeweise

u.s.w.

Solche Themen können entweder in Form von Referaten oder schriftlichen Ausarbeitungen (vgl. Wagenschein 1962, S. 24!) den Schülern, einzeln oder in Gruppen, aufgegeben werden. Themen dieser Art sind auch für Fachbereichsarbeiten, für Ausarbeitungen im Zuge der Vorbereitung auf die mündliche Mathematikmatura sowie als Themen im Rahmen des Wahlpflichtfaches Mathematik geeignet.

Die Schüler sollten möglichst früh und behutsam an solche Aufgaben herangeführt werden. Eine Wiener Kollegin berichtete etwa, dass sie in einer 4. Klasse AHS bei der Besprechung des Kreises den Schülern die Aufgabe stellte, aus dem eigenen Schulbuch, aus anderen Büchern und Lexika (eigene und der Schulbibliothek) jeweils etwa eine Seite über Thales, Pythagoras, Archimedes sowie über die Zahl π zu schreiben. Sie war – wie sie berichtete – völlig überrascht über den Elan, mit dem ein Großteil der Schüler ans Werk ging, sowie auch über die ansprechenden Arbeiten.

2.7 Fächerübergreifender Unterricht

Viele mathematikhistorische Themen können durch Einbinden des soziokulturellen Kontextes als Anlass zu einem fächerübergreifenden (fächerverbindenden, fächerberührenden) Unterricht (im weitesten Sinn des Wortes) genommen werden.

2.8 Vermittlung historischer Fakten via Rechenaufgaben

Jede solche Aufgabe bzw. das durch sie vermittelte, wenn auch punktuelle Wissen könnte als "Kondensationskern" für eine intensivere Beschäftigung und ein umfassenderes historisches Wissen fungieren.

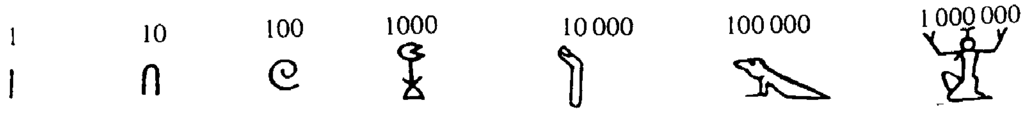
Auch wenn der Einbau historischer Aufgaben im Unterricht der traditionellen Unterrichtsauffassung noch am ehesten entspricht, so ist dennoch eine Loslösung von einer weit verbreiteten Unterrichtstradition notwendig: es wäre unsinnig, den Schülern von einer historischen Aufgabe zwecks Einübung weitere mehr oder weniger modifizierte Versionen vorzusetzen. Wenn man sich für die Darbietung solcher historischen Aufgaben entscheidet, so ist beim Lernprozess des Schülers wohl nur die Rekapitulation der dargebotenen Version, nebst entsprechender inhaltlicher und historischer Argumentation, sinnvoll. Nur zu oft wird ein interessantes Thema hauptsächlich wegen des Fehlens von entsprechenden Analogübungsaufgaben und damit wegen des Nicht-Hineinpassens in das Bild des üblichen Mathematikunterrichts als nicht schulrelevant bzw. ununterrichtbar abgetan; Beispiele dafür sind etwa das Beweisen, oder das Bilden konkreter mathematischer Modelle. Vielleicht können historische Inhalte mithelfen, diese unnötige und unmotivierte Einengung des Mathematikunterrichts auf die traditionelle Einübungsmethodik aufzuweichen und – wie in anderen Fächern (etwa Physik) längst gängig – interessante Tatsachen um ihrer selbst willen zu unterrichten (d.h. ohne dass diese in Aufgabensequenzen münden) und bei der Leistungsbeurteilung von Schülern in gleicher Weise wiedergeben zu lassen. (Leistungsbeurteilung soll hier in einem sehr weiten Sinn aufgefasst werden: Wenn man im Unterricht einen Stoff darbietet oder erarbeiten lässt, so hat ein Schüler, der sich den dargebotenen Stoff dann auch tatsächlich aneignet, ein Recht darauf, dass diese Lernleistung auch honoriert wird. Anderenfalls wird ein Schüler bei einem als nicht beurteilungsrelevant erkannten Stoff "abschalten" – und das mit Recht. Zahlreiche Erfahrnungen etwa zum Thema "Beweisen" belegen dies leider nur zu eindrucksvoll.)

3 Unterrichtsbeispiele

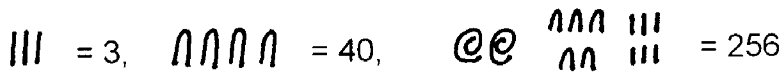
3.1 Ägyptische Zahlen

Bei der Behandlung des dekadischen Zahlensystems können durch Vergleich mit der ägyptischen Zahlenschreibweise Bedeutung und Vorteile des (dekadischen) Stellenwertsystems herausgearbeitet werden.

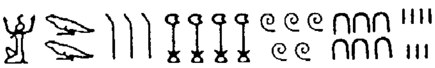
Bereits in der Frühzeit der ägyptischen Hochkultur um 3000v.Chr. wurden folgende Zahlzeichen verwendet:



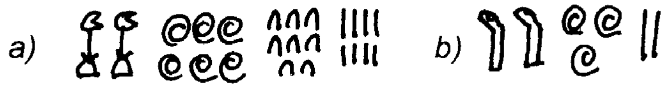
Die einzelnen natürlichen Zahlen wurden durch Aneinanderreihen dieser Zahlen dargestellt:



Man begann links mit den Vielfachen von 1, schrieb dann rechts davon die Vielfachen von 10 u.s.w. In einigen Büchern wird auch - unserer Gewohnheit entsprechend - nach absteigenden Größenordnungen angeordnet.



Aufgabe: Welche Zahlen werden durch



dargestellt?

Aufgabe: Schreib folgende Zahlen mit ägyptischen Zahlzeichen:

273; 8002; 192478; 200000

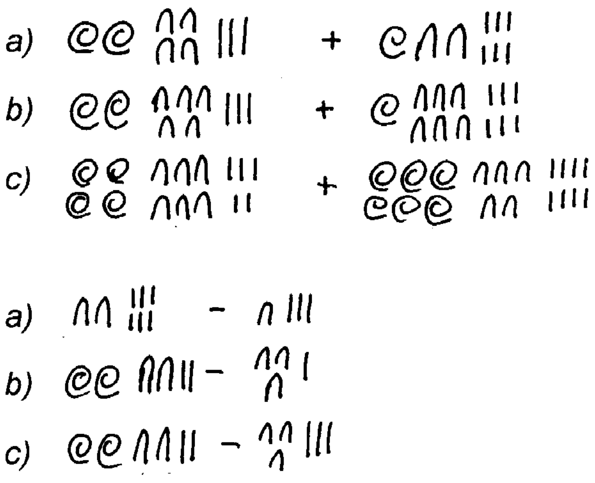
Nenne Vor- und Nachteile der ägyptischen bzw. unserer Schreibweise!

3.2 Addieren und Subtrahieren mit ägyptischen Zahlen

Bei Addition und Subtraktion von Zahlen in ägyptischer Darstellung kann insbesondere der Übertrag bewusst gemacht werden.

Aufgabe: Addiere: a) b) c)

Aufgabe: Subtrahiere: a) b) c)



3.3 Bruchrechnung auf ägyptisch

Zur Darstellung von Brüchen verwendeten die Ägypter nur Kehrwerte natürlicher Zahlen („Stammbrüche"). Diese Bruchzahlen wurden durch Angabe des Nenners, versehen mit einem „Bruchzeichen" ( ), geschrieben, z.B.: $\frac{1}{3} =$ $\quad \frac{1}{12} =$

Nur für $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ gab es ein eigenes Symbol: $\frac{1}{2} =$ $\quad \frac{1}{4} =$

Eine Ausnahmestellung hatte $\frac{2}{3}$, der einzige Nicht-Stammbruch, für den die Ägypter ein eigenes Zeichen verwendeten: $\frac{2}{3} =$ (also: $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$)

Traten im Zuge einer Addition von Brüchen zwei gleiche Summanden auf, so ersetzten die Ägypter diese durch eine Summe aus einem möglichst großen Bruch und einem „Korrekturbruch", z.B.:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$$

Manchmal waren auch mehr als zwei Brüche notwendig:

$$\frac{1}{13}+\frac{1}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$$

Für solche Umrechnungen verwendete man Tabellen. Eine solche Tabelle findet sich (neben einer Sammlung von Aufgaben) im Papyrus Rhind (auch „Rechenbuch des Ahmes" genannt), das vom Engländer A.H.Rhind 1850 in einer Ruine in Theben gefunden wurde und heute im Britischen Museum in London aufbewahrt wird. Ein Teil dieser Tabelle ist im Folgenden wiedergegeben.

$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$	$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}$	$\frac{2}{53}=\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795}$	$\frac{2}{77}=\frac{1}{44}+\frac{1}{308}$
$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$	$\frac{2}{31}=\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155}$	$\frac{2}{55}=\frac{1}{30}+\frac{1}{330}$	$\frac{2}{79}=\frac{1}{60}+\frac{1}{237}+\frac{1}{316}$
$\frac{2}{9}=\frac{1}{16}+\frac{1}{28}$	$\frac{2}{33}=\frac{1}{22}+\frac{1}{66}$	$\frac{2}{57}=\frac{1}{38}+\frac{1}{114}$	$\frac{2}{81}=\frac{1}{54}+\frac{1}{162}$
$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$	$\frac{2}{35}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$	$\frac{2}{59}=\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531}$	$\frac{2}{83}=\frac{1}{60}+\frac{1}{332}+\frac{1}{415}+\frac{1}{498}$
$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$	$\frac{2}{37}=\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296}$	$\frac{2}{61}=\frac{1}{40}+\frac{1}{244}+\frac{1}{448}+\frac{1}{610}$	$\frac{2}{85}=\frac{1}{51}+\frac{1}{225}$
$\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$	$\frac{2}{39}=\frac{1}{26}+\frac{1}{78}$	$\frac{2}{63}=\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$	$\frac{2}{87}=\frac{1}{58}+\frac{1}{174}$
$\frac{2}{17}=\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$	$\frac{2}{41}=\frac{1}{24}+\frac{1}{246}+\frac{1}{328}$	$\frac{2}{65}=\frac{1}{39}+\frac{1}{195}$	$\frac{2}{89}=\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890}$
$\frac{2}{19}=\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$	$\frac{2}{43}=\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}$	$\frac{2}{67}=\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{536}$	$\frac{2}{91}=\frac{1}{70}+\frac{1}{130}$
$\frac{2}{21}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$	$\frac{2}{45}=\frac{1}{30}+\frac{1}{90}$	$\frac{2}{69}=\frac{1}{46}+\frac{1}{138}$	$\frac{2}{93}=\frac{1}{62}+\frac{1}{186}$
$\frac{2}{23}=\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$	$\frac{2}{47}=\frac{1}{30}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470}$	$\frac{2}{71}=\frac{1}{40}+\frac{1}{568}+\frac{1}{70}$	$\frac{2}{95}=\frac{1}{60}+\frac{1}{380}+\frac{1}{570}$
$\frac{2}{25}=\frac{1}{15}+\frac{1}{75}$	$\frac{2}{49}=\frac{1}{28}+\frac{1}{196}$	$\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{365}$	$\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$
$\frac{2}{27}=\frac{1}{18}+\frac{1}{54}$	$\frac{2}{51}=\frac{1}{34}+\frac{1}{102}$	$\frac{2}{75}=\frac{1}{50}+\frac{1}{150}$	$\frac{2}{99}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198}$

Beispiel: $\frac{5}{13}=\frac{2}{13}+\frac{2}{13}+\frac{1}{13}$ Aus der Tabelle entnimmt man: $\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$

Somit ist:

$$\frac{5}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}+\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}+\frac{1}{13}=\frac{2}{8}+\frac{2}{52}+\frac{2}{104}+\frac{1}{13}=\frac{1}{4}+\frac{1}{26}+\frac{1}{52}+\frac{1}{13}$$

Aufgabe: Stelle mit Hilfe der obigen Tabelle folgende Brüche als Summe von Stammbrüchen dar: a) $\frac{3}{11}$ b) $\frac{3}{35}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{5}{21}$

Aufgabe: Stelle $\frac{9}{21}$*, ohne vorher zu kürzen, als Summe von Stammbrüchen dar und vergleiche mit der Darstellung, die sich für* $\frac{3}{7}$ *ergibt!*

(Weitere Anregungen zum ägyptischen Bruchrechnen: Barthel 1986, Seite 33!)

3.4 Ägyptisches Multiplizieren

Wie berechneten die Ägypter etwa $13 \cdot 17$? Sie stellten einen der Faktoren als Summe von Potenzen von 2 dar:

$$13=8+4+1$$

Weiters verdoppelten sie den anderen Faktor mehrmals und addierten jene Vielfachen von 17, die den in der Zerlegung von 13 auftretenden Zweierpotenzen entsprechen.

1	17
(2)	(34)
4	68
8	136
13	221

Aufgabe: Versuche, diese Methode allgemein zu begründen! Berechne auf diese Weise: a) $86 \cdot 23$ *b)* $138 \cdot 51$

3.5 Ägyptische Division

Beim Dividieren gingen die Ägypter analog zur Multiplikation vor:

$153 : 17 = ?$

1	17
(2)	(34)
(4)	(68)
8	136
9	153

$19 : 8 = ?$

(1)	(8)
2	16
(1/2)	(4)
1/4	2
1/8	1
2 + 1/4 + 1/8	19

Aufgabe: Versuche, diese Methode durch Zurückführen auf die Multiplikation zu erklären! Berechne auf diese Weise: a) 224 : 14 b) 61 : 16

Versuche eine Aufgabe anzugeben, wo diese Methode nicht funktioniert!

3.6 Textaufgaben

In den ägyptischen Quellen findet man überwiegend Textaufgaben, sogenannte „Hau-Rechnungen", wobei „Hau" so viel heißt wie „Haufen", „Menge", „(unbekannte) Anzahl". Die Ägypter verwendeten zur Lösung häufig die Methode des falschen Ansatzes, z.B.:

Ein Haufen und sein vierter Teil ergeben zusammen 15.

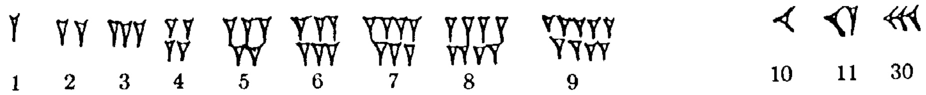
Lösung: Nimm an, 4 ist die gesuchte Zahl; dann ist $4 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 5$. Da die gewünschte Zahl 15 ist und $15 = 3 \cdot 5$, ist auch die gesuchte Zahl das Dreifache der ursprünglich angesetzten Zahl 4, also $3 \cdot 4 = 12$.

Aufgabe: a) Gib ein ähnliches Beispiel an, wo diese Methode zum richtigen Ergebnis führt, und eines, bei dem diese Methode nicht zielführend ist!

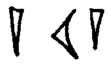
b) Versuche, allgemein zu beschreiben, für welche Art von Aufgaben diese Methode verwendbar ist!

3.7 Das babylonische Sexagesimalsystem

Die Babylonier verwendeten zur Darstellung von Zahlen zwei Symbole:  für 1 und  für 10. (Diese Zeichen wurden durch Eindrücken eines Stabes mit dreieckigem Querschnitt in weiche Tontafeln erzeugt.)

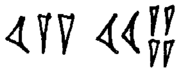
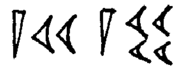


Außerdem verwendeten sie ein Stellenwertsystem mit der Basis 60, das später vor allem durch das astronomische Werk des Ptolemaios Verbreitung fand und auch uns noch in der Winkelmessung und im Zeitmaß erhalten ist:

 $= 1 \cdot 60 + 11 = 71$

Diese Darstellung kann aber auch $1 \cdot 60^2 + 11 \cdot 60$, oder auch $1 + 11 \cdot \frac{1}{60}$, o.Ä. bedeuten. Für $1 \cdot 60^2 + 11$ schrieb man , d.h. die freibleibende Stelle wurde in früheren Zeiten durch einen größeren Abstand angedeutet, später durch ein „Lückenzeichen“  markiert.

Aufgabe: Welche Zahlen werden durch folgende Zeichen dargestellt? (Jeweils mehrere Antworten möglich!)

a)  b)  c) 

Wir wollen uns im Folgenden mehr mit dem mathematischen Kern des Sexagesimalsystems beschäftigen, ohne uns mit den mühsamen Zeichen aufzuhalten, d.h. wir verwenden statt der Keilschriftsymbole unsere vertraute Schreibweise, z.B.:

3, 17, 34 soll bedeuten: , also $3 \cdot 60^2 + 17 \cdot 60 + 34$.

Aufgabe: a) Schreib obige Zahl in dezimaler Schreibweise!

b) Übertrage ins Dezimalsystem: 43, 8, 27 2, 0, 49

c) Übertrage ins Sexagesimalsystem: 3731 223258

d) Übertrage ins Dezimalsystem (ein Strichpunkt soll unserem Komma entsprechen): 21;13 1,3;52 2;0,1

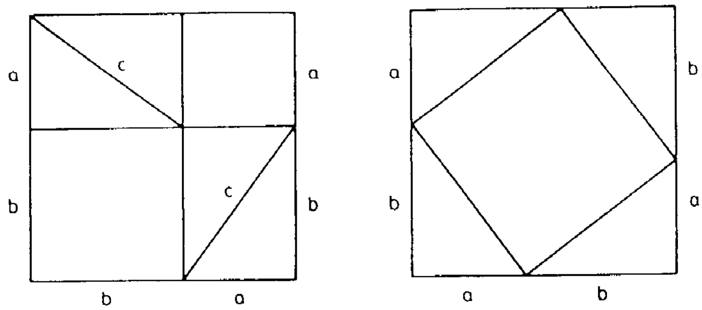
e) Übertrage ins Sexagesimalsystem: 31,76 4,007

f) Stelle a) $\frac{1}{3}$, *b)* $\frac{5}{6}$, *c)* $\frac{1}{7}$, *d)* $\frac{5}{8}$ *als Sexagesimalzahlen dar!*

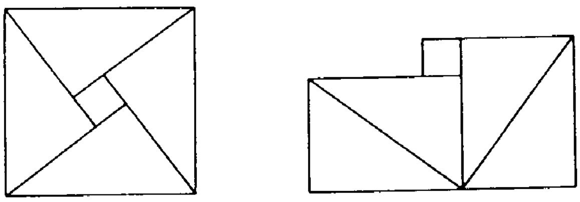
3.8 Der pythagoreische Lehrsatz

Es gibt vermutlich zu keinem Lehrsatz der Mathematik mehr Beweise als zum pythagoreischen Lehrsatz. (In Loomis 1968 sind 300 zu finden!)

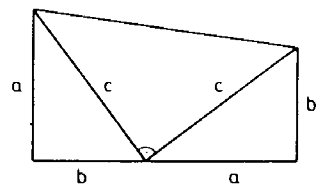
Auf Pythagoras selbst soll eine Beweisidee zurückgehen, die durch folgende Zeichnung ausgedrückt wird.



Der indische Mathematiker Bhaskara (um 1150) gab als Beweis nur folgende Figur, versehen mit dem Kommentar „Sieh da!“ an:



Schließlich sei noch eine Beweisidee erwähnt, die von James Garfield (1831-1881), später Präsident der USA, stammt.

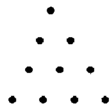


Aufgabe: Versuche, die in diesen Skizzen enthaltenen Beweisideen ausführlich in Worten zu formulieren!

3.9 Figurierte Zahlen

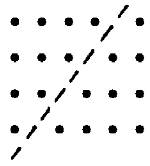
Die Weltanschauung der Pythagoreer war geprägt durch die Auffassung, „alles ist Zahl“: Das ganze Universum lässt sich durch einfache (d.h. natürliche) Zahlen und Verhältnisse solcher Zahlen beschreiben. Ihre musiktheoretischen Untersuchungen schienen dies eindrucksvoll zu bestätigen. („Zahlenharmonie“) Daraus resultiert auch eine bis ins Mystische reichende Beziehung zu Zahlen und ihren Gesetzmäßigkeiten. Diese wurden auch durch entsprechende Figuren verdeutlicht. Solche Darstellungen können eine gute Hilfe beim Aufstellen entsprechender Formeln sein, z.B.:

Dreieckszahlen:



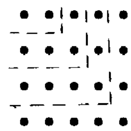
$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot n$$

bzw.



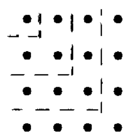
$$2\cdot\sum_{i=1}^{n} i=(n+1)\cdot n$$

Anders angeordnet:



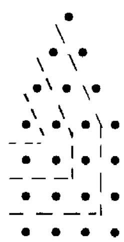
$$\sum_{i=1}^{n} 2\cdot i=(n+1)\cdot n$$

Eine sehr ähnliche Figur führt zu einer anderen, bekannten Formel:



$$\sum_{i=1}^{n}(2\cdot i-1)=n^2$$

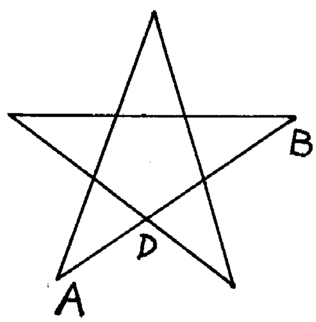
Auch Fünfeckszahlen wurden von den Pythagoreern untersucht:



$$\sum_{i=1}^{n}(3i-2)=\frac{1}{2}\cdot(3n-1)\cdot n$$

3.10 Das Sternfünfeck – Irrationalität von $\sqrt{5}$ - Der Goldene Schnitt

Die Pythagoreer bildeten eine sektenähnliche Vereinigung, und als ihr Symbol verwendeten sie das Sternfünfeck. Was für einen Schock muss es doch für die Pythagoreer bedeutet haben zu erkennen, dass es in ihrem Vereinssymbol eine Strecke gibt, die – ganz im Gegensatz zu ihrer Weltanschauung – sich nicht durch ein einfaches Verhältnis zweier natürlicher Zahlen (d. h. nicht als rationale Zahl) darstellen lässt.



Aufgabe: Zeige, dass im Sternfünfeck gilt: AB : DB = DB : AD (diese Beziehung nennt man auch den Goldenen Schnitt) und berechne daraus die Länge der Strecken AD und DB !

3.11 Würfelverdoppelung – Kegelschnitte

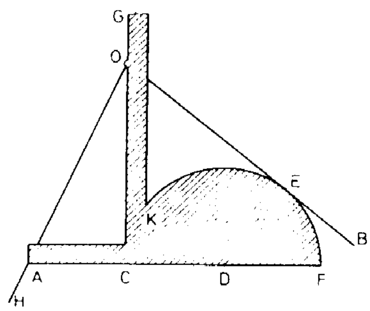
Die drei klassischen Probleme der Antike, die Würfelverdoppelung, die Winkeldreiteilung und die Quadratur des Kreises (konstruktiv mit Zirkel und Lineal), wirkten auf viele Generationen von Mathematikern sehr anregend. Für etwa 2000 Jahre blieben sie offene Probleme, bis bewiesen wurde, dass sie nicht (mit Zirkel und Lineal) lösbar sind. Trotz der Beschränkung auf Zirkel und Lineal erfanden die Griechen verschiedenste Methoden und auch materielle Geräte zur Lösung dieser Aufgabenstellungen. Ein solcher Versuch zur Lösung des Problems der Würfelverdoppelung führte Menaichmos (um 350 v. Chr.) auf Kegelschnitte. Bei der Würfelverdoppelung ist, ausgehend von einem gegebenen Würfel mit der Kantenlänge a, ein Würfel mit doppeltem Volumen gesucht. Dieses Problem ist – unseren Sprachgebrauch verwendend - gleichbedeutend mit der Konstruktion von $\sqrt[3]{2}$. Menaichmos erkannte, dass dies äquivalent zur Ermittlung der mittleren Proportionalen x, y in der Proportionalität $1 : x = x : y = y : 2$ ist. Wegen $x^2=y$ und $y^2=2x$ ist $x^4 = y^2 = 2x$, also $x^3=2$ und somit $x=\sqrt[3]{2}$. Diese Zahl x kann man geometrisch näherungsweise als Schnitt der Parabel $y^2=2x$ und der Hyperbel $xy=2$ ermitteln.

Aufgabe: Zeichne die Parabel $y^2=2x$ und die Hyperbel $xy=2$ und ermittle durch Schnitt dieser beiden Kurven näherungsweise einen Wert für $\sqrt[3]{2}$!

Für weitere Methoden zur instrumentellen Ermittlung von $\sqrt[3]{2}$ (Winkelhaken, verschiebbare Platten), oder mit Hilfe einer Kurve, der sogenannten Cissoide, siehe etwa Kaiser/Nöbauer 1984, S.140. Die Begründungen dieser Methoden, meist mit Hilfe kongruenter oder ähnlicher Dreiecke, können ebenfalls in Aufgabenform eingekleidet werden.

3.12 Winkeldreiteilung

Neben anderen Methoden (z.B. mit Hilfe der Konchoide) haben die Griechen auch ein Gerät zur Winkeldreiteilung erdacht. Soll der Winkel AOE gedrittelt werden, so legt man das Gerät entsprechend nebenstehender Abbildung an.



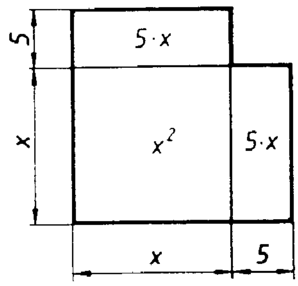
Aufgabe: Begründe, dass der Winkel AOC genau ein Drittel des Winkels AOE ist!

3.13 Erdumfangsberechnung nach Eratosthenes

ist bereits in Schulbüchern zu finden (z.B. Laub et. al. 1996, S. 222).

3.14 Quadratische Gleichungen nach Al-Khwarizmi

Die bei der Ableitung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen angewandte Methode der Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat wurde bereits vom arabischen Mathematiker Al-Khwarizmi (780?-850?) angewandt, von dessen Namen das Wort Algorithmus abgeleitet ist. Auch der Titel seines Hauptwerks, „al-jabr wa'l muqabalah" lebt heute noch im Wort Algebra fort. Eine Aufgabe aus diesem Buch lautet:

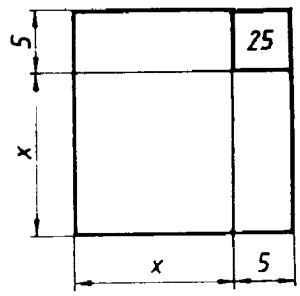


Ein Quadrat und 10 seiner Wurzeln ist gleich 39 Einheiten.

In heutiger Schreibweise lautet diese Gleichung:

$$x^2 + 10x = 39$$

Die linke Seite der Gleichung deutete Al-Khwarizmi als ein Quadrat mit zwei angefügten Rechtecken. Durch Ergänzung zu einem vollständigen Quadrat erkennt man, dass man bei der Gleichung auf beiden Seiten 25 Einheiten dazugeben muss:



$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64$$
$$(x + 5)^2 = 64$$
$$x + 5 = 8$$
$$x = 3$$

Die zweite Lösung, eine negative Zahl, konnte mit dieser geometrischen Methode natürlich nicht gefunden werden. Negative Zahlen waren Al-Khwarizmi auch noch nicht bekannt. Daher musste er auch mehrere Typen von quadratischen Gleichungen gesondert untersuchen. In heutiger Schreibweise sind dies folgende Gleichungen:

$ax = b$	$ax^2 = bx$	$ax^2 + bx = c$
$ax^2 = b$	$ax^2 = bx + c$	$ax^2 + c = bx$

(Auch Variable für Koeffizienten waren Al-Khwarizmi noch nicht bekannt; daher findet man in seinem Buch die Lösungsmethoden stets in konkrete Aufgaben verpackt.)

3.15 Fermat's Extremwertmethode

Auf Pierre Fermat (1601-1665) geht eine Überlegung zur Berechnung von Extremwerten zurück, die dieser selbst an folgendem Beispiel zu erläutern versuchte.

Gegeben sei eine Strecke [A,B] mit der Länge b. Diese ist durch einen Punkt C so in zwei Teile zu teilen, dass das Produkt der Längen der Teilstrecken ein Maximum wird.

Fermat argumentiert nun folgendermaßen: Angenommen der Punkt C und somit die Länge der einen Teilstrecke a wäre bereits bekannt, d.h. es wäre $a \cdot (b-a)$ maximal. Dann würde eine geringfügige Änderung von a sich auf den Wert des Produkts kaum auswirken:

$$a \cdot (b-a) \approx (a+e) \cdot (b-a-e) \qquad (e<<a)$$

Daraus erhält man:

$$ab - a^2 \approx ab - a^2 - ae + eb - ea - e^2$$

$$eb \approx 2ae + e^2$$

Nun dividiert man durch e (und setzt somit voraus, dass $e \neq 0$ ist):

$$b \approx 2a + e$$

Da nun – so argumentierte Fermat – e beliebig klein sein kann, muss gelten:

$$b = 2a$$

also: $$a = \frac{b}{2}$$

Das Wesentliche an diesem Beispiel ist nicht so sehr die Aufgabenstellung selbst (solche Aufgabenstellungen sind im üblichen Mathematikunterricht ohnehin vorhanden), sondern vielmehr die Argumentation Fermats – und vor allem die Ähnlichkeit zu Newtons und Leibniz' Argumentation

4 Literatur

Artmann, B., Spalt, D. D., Gerecke, W.: Transzendenzbeweis für e gestern und heute. Math.Sem.Ber. 34 (1987), S. 187–219

Barthel, H.: Bruchrechnen – ägyptisch, Bruchrechnen – babylonisch mathematik lehren, Heft 19, Dezember 1986, S. 32 – 35

BMUKS (Hrsg.): Handreichungen Geschichte und Sozialkunde, Heft 15, Klagenfurt, Oktober 1987

Bürger, H., Fischer, R., Malle, G., Mühlgassner, T., Kronfellner, M., Schlöglhofer, F.: Mathematik Oberstufe 1-4
Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1989, 1990, 1991, 1992

Jones, P.S.: The History of Mathematics as a Teaching Tool
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 1978, Heft 2, S. 57 – 63

Kaiser, H., Nöbauer , W.: Geschichte der Mathematik
Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1984

Kirchgraber, U.: Mathematik im Chaos. Ein Zugang auf dem Niveau der Sekundarstufe II
Mathematische Semesterberichte 39 (1992), Heft 1, S. 43 – 68

Kronfellner, M.: Untersuchungen zum Einbau historischer Elemente im Mathematikunterricht.
Erscheint 1997 im Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien

Kronfellner, M., Peschek, W.: Angewandte Mathematik 1 – 4
Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1989, 1990, 1991, 1992

Laub, J., Hruby, E., Reichel, H.-Ch., Litschauer, D., Groß, H.: Lehrbuch der Mathematik und Aufgabensammlung für die 4. Klasse der höheren Schulen und der Hauptschulen.
Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1996

Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schule – Unterstufe
Österreichischer Bundesverlag, Wien, Jugend und Volk, Wien, 1985

Loomis, E. S.: The Pythagorean Proposition
National Council of Teachers of Mathematics, Washington D.C., 1968 (2. Auflage)

Maass, J., Schlöglmann, W.: Mathematik als Technologie. Konsequenzen für den Mathematikunterricht
mathematica didactica 15 (1992), Heft 2, S. 38 – 70

Toeplitz, O.: Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihre Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an höheren Schulen
Jahresberichte DMV 36 (1927), S. 90 – 100

Vollrath, H. J.: Störungen des "didaktischen Gleichgewichts" im Mathematikunterricht
Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 40/6 (1987), S. 373 – 378

Wagenschein, M.: Pädagogische Aufsätze zum mathematischen Unterricht
(hrsg. von E. Löffler) Der Mathematikunterricht 8 (1962), Heft 4

Wittmann, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts
Vieweg, Braunschweig, 1975 (3. Auflage)